Métodos Matemáticos em Engenharia e Ciências da Terra– FCUL – DEGGE

Série de Exercícios 1

1 – Dados os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}$ e $\vec{v} = -3\overrightarrow{e_1} + m\overrightarrow{e_2}$, onde $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ são normados e ortogonais.

a) Calcule m de modo que $\vec{u}, \vec{v}$ sejam paralelos
b) Calcule m de modo que $\vec{u}, \vec{v}$ sejam perpendiculares
c) Calcule m de modo que $\vec{v}$ tenha norma 5.
d) No caso obtido em c), calcule o ângulo com $\vec{u}$
e) Calcule nesse caso, a norma de $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$, Represente no plano esses vetores. Verifique na prática a desigualdade triangular.

2 - Dados os pontos A(3, -4) e B(-1, 1) e o vetor $\vec{v} = (-2,3)$ numa base ortonormada (b.o.n.) em $\mathbb{R}^2$. Calcule:

a) . (B - A) + 2$\vec{v}$
b) (A - B) - $\vec{v}$
c) B + 2(B - A)
d) 3$\vec{v}$ - 2(A - B)

3) Dada uma b.o.n $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ e $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}$, obtida por uma rotação direta com um ângulo $\alpha\ rad$.

a) Obtenha as coordenadas dos vetores $\vec{u}$=(2,3) e $\vec{v}$=(-1,2) na nova base $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}$. Começe por escrever a matriz de transformação de base.

b) Calcule o produto interno entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ nas duas bases e verifique que este fica invariante. Pode concluir que o produto interno fica invariante para uma transformação ortogonal?

4) Dados dois vetores $\vec{h}, \vec{m}$ em $\mathbb{R}^2$ de norma unitária representando a posição do ponteiro das horas e minutos respetivamente em cada instante t (em segundos contados dessde as 0h).

a) Represente $\vec{h}, \vec{m}$ na b.o.n. $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ apontando respetivamente para as 0h (ou 12h) e as 3h. Note que os vetores descrevem um movimento circular uniforme com velocidades angulares bem definidas (calcule-as).

b) Em que instantes os vetores coincidem?

c) Em que instantes os vetores são perpendiculares entre si?

d) Exprima os vetores representando as derivadas temporais de ambos os vetores. Mostre que a derivada temporal de $\vec{h}$ é perpendicular a $\vec{h}$ (idem para $\vec{m}$).

5) a) Verifique que o tensor de 2ª ordem $\hat{A}$, de elementos A_{ij}, admite a decomposição: $\hat{A} = \hat{A}^s + \hat{A}^a$ numa parte simétrica $\hat{A}^s = \hat{A}^{sT}$ e numa parte anti-simétrica $\hat{A}^a = -\hat{A}^{aT}$.

com $\hat{A}^s = \frac{1}{2}\left(\hat{A} + \hat{A}^T\right); \hat{A}^a = \frac{1}{2}\left(\hat{A} - \hat{A}^T\right); \left(\hat{A}^T\right)_{ij} = \left(\hat{A}\right)_{ji}$

b) Mostre que esta decomposição é única.

c)Verifique que: $\hat{A} - \hat{A}^T = 2\hat{A}^a$

d)Mostre que: $\hat{A}^s = \hat{A}^{s0} + \frac{1}{n}\left(Tr\hat{A}\right)\hat{\delta};$ onde $\hat{A}^{s0}$é um tensor de traço nulo, i.e $Tr\left(\hat{A}^{s0}\right) = 0$ onde *n* é a dimensão do tensor.

6) Mostre que, se $\hat{A}$ é um tensor de 2ª ordem, então: $Tr\hat{A} = \hat{A}:\hat{\delta} = \hat{A}^s:\hat{\delta}$

7) Mostre que, se $\hat{A}$ é um tensor de 2ª ordem simétrico e $\hat{B}$ é um tensor de 2ª ordem anti-simétrico, então $\hat{A}:\hat{B} = 0$

8) Prove que se $\widehat{D} = \vec{a} \quad \vec{b}$, então $Tr\widehat{D} = \vec{a}.\vec{b}$

9) Mostre que o produto interno entre vetores é invariante para uma mudança de base (invariante tensorial) i.e. $\tilde{a}_j\tilde{b}_j = a_i b_i = \vec{a} \bullet \vec{b}$em que: $\tilde{a}_j = a_i U_{ij}; \tilde{b}_j = b_i U_{ij}$onde U é uma matriz ortogonal.

10). Com base nos axiomas do produto interno e das normas, mostre a desigualdade de Schwarz:

a) $|\vec{a}.\vec{b}|^2 \leq \|\vec{a}\|^2\left\|\vec{b}\right\|^2$

b) a desigualdade triangular: $\left\|\vec{a} + \vec{b}\right\| \leq \|\vec{a}\| + \left\|\vec{b}\right\|$ (um dos axiomas das normas).

c) e a lei do paralelogramo: $\left\|\vec{a} + \vec{b}\right\|^2 + \left\|\vec{a} - \vec{b}\right\|^2 = 2\|\vec{a}\|^2 + 2\left\|\vec{b}\right\|^2$. Faça um esquema interpretativo.

d) Escreva a relação b) usando a norma L^p : $\|\vec{u}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p\right)^{1/p}; p > 0$

11) a) Recorrendo ao tensor Levi-Civita, exprima em $\mathbb{R}^3$, o valor do produto misto $\vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c})$ em função das coordenas dos vetores numa b.o.n. Qual a condição para que o produto misto seja nulo?

b) Aplique o produto misto para calcular o volume de um paralelogramo definido pelos vetores (1,0,0), (1,1,0) e (1,1,4),

12). Mostre,recorrendo à regra épsilon-delta a seguinte igualdade do produto externo:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{d})]\vec{c} - [\vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c})]\vec{d}$$